Многочлены

13.03.2014

10 класс

1. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого целого k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + \cdots + P(n)$ делится на k.

2. В выражении $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2014}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

3. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x, y)$, такого, что $P(x, y) > 0$ тогда и только тогда, когда $x > 0$ и $y > 0$.

4. Пусть для некоторых многочленов с действительными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ выполнено равенство $x^{2014} = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)P(x) + Q(x)$, где степень $Q(x)$ не превосходит 2. Докажите, что все коэффициенты $P(x)$ положительны.

5. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что среди его коэффициентов есть отрицательные, а у $(P(x))^n$ все коэффициенты положительны для любого натурального $n > 1$?

6. Докажите, что если многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами принимает при всех действительных x неотрицательные значения, то он представим в виде $P(x) = Q_1^2(x) + \cdots + Q_n^2(x)$, где $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x)$ - многочлены с действительными коэффициентами.

7. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет таким свойствам: $P(0) = 1,\ P^2(x) = 1 + x + x^{100}Q(x)$, где $Q(x)$ - некий многочлен. Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x) + 1)^{100}$ равен нулю.