

# Метод спуска

10 класс

17.02.14

1. **Упражнение.** Покажите, что  $x^3 + py^3 + p^2z^3 = 0$  не имеет нетривиальных решений в целых числах при простом  $p$ .
2. Имеется 101 корова, каждая весит целое число грамм. Известно, что любые 100 из них можно разбить на 2 стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все буренки весят одинаково.
3. Опишите все натуральные числа, являющиеся суммой двух квадратов целых чисел.
  - а) Докажите, что простое число вида  $p = 4k + 3$  не является суммой двух квадратов.
  - б) Докажите, что при  $p = 4k + 1$  сравнение  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  разрешимо.
  - в)  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) =$ сумма двух квадратов.
  - г) Если число  $mp$  при  $1 < m < p$  является суммой двух квадратов, то для некоторого  $0 < n < m$  число  $np$  является суммой двух квадратов (спуск).
4. На окружности расположено  $n$  различных натуральных чисел. Каждую секунду между соседними числами записывается их среднее арифметическое, после чего старые числа стираются. Докажите, что через несколько шагов получится набор, в котором не все числа будут целыми.
5. По окружности стоят натуральные числа  $a_1, \dots, a_{128}$ . Из них образуются новые числа по правилу  $b_k = |a_{k+1} - a_k|$  ( $a_{129} = a_1$ ) и процесс повторяется. Докажите, что через несколько шагов все числа станут нулевыми.
6. Теорема Лагранжа. Докажите, что каждое целое положительное число является суммой четырех квадратов. (В качестве подсказки смотри задачу номер 3: Докажите например для начала, что для любого простого  $p$  сравнение  $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  разрешимо).