

Метод спуска

10 класс

17.02.14

1. **Упражнение.** Покажите, что $x^3 + py^3 + p^2z^3 = 0$ не имеет нетривиальных решений в целых числах при простом p .
2. Имеется 101 корова, каждая весит целое число грамм. Известно, что любые 100 из них можно разбить на 2 стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все буренки весят одинаково.
3. Опишите все натуральные числа, являющиеся суммой двух квадратов целых чисел.
 - а) Докажите, что простое число вида $p = 4k + 3$ не является суммой двух квадратов.
 - б) Докажите, что при $p = 4k + 1$ сравнение $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо.
 - в) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) =$ сумма двух квадратов.
 - г) Если число mp при $1 < m < p$ является суммой двух квадратов, то для некоторого $0 < n < m$ число np является суммой двух квадратов (спуск).
4. На окружности расположено n различных натуральных чисел. Каждую секунду между соседними числами записывается их среднее арифметическое, после чего старые числа стираются. Докажите, что через несколько шагов получится набор, в котором не все числа будут целыми.
5. По окружности стоят натуральные числа a_1, \dots, a_{128} . Из них образуются новые числа по правилу $b_k = |a_{k+1} - a_k|$ ($a_{129} = a_1$) и процесс повторяется. Докажите, что через несколько шагов все числа станут нулевыми.
6. Теорема Лагранжа. Докажите, что каждое целое положительное число является суммой четырех квадратов. (В качестве подсказки смотри задачу номер 3: Докажите например для начала, что для любого простого p сравнение $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо).