

# Комбинаторика. Разнобой.

10 класс

27.01.14

1. Все грани многогранника являются треугольниками. Каждая грань окрашена в один из двух цветов так, что количество ребер, по которым граничат одноцветные грани, минимально. Докажите, что граней одного цвета не более, чем в полтора раза больше, чем граней другого.
2. Депутаты Парламента образовали несколько комиссий не более чем из 10 человек каждая. Известно, что для любых одиннадцати комиссий найдётся человек, который входит во все эти комиссии. Докажите, что найдётся человек, который входит во все комиссии.
3. Назовем натуральное число *маленьким*, если оно не превосходит 100. Каждому множеству, составленному из 49 маленьких чисел, поставлено в соответствие некоторое маленькое число. Докажите, что можно так выбрать 50 маленьких чисел, что никакому множеству, состоящему из 49 из них, не сопоставлено оставшееся число.
4. В обществе из  $n$  человек каждое непустое подмножество считается комиссией. В каждой комиссии нужно выбрать председателя, соблюдая правило: если комиссия  $C$  является объединением нескольких меньших комиссий, то председателем  $C$  должен быть один из председателей этих меньших комиссий. Сколькими способами можно выбрать председателей?
5. На окружности отмечено  $2N$  точек ( $N$  натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем паросочетанием такой набор из  $N$  хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.
6. Каждая сторона равностороннего треугольника разделена на 6 равных частей, через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам, делящие исходный треугольник на 36 маленьких треугольничков. В каждой из вершин этих треугольничков сидит по жуку. Они одновременно начинают двигаться по линиям деления с равными скоростями. Когда жук попадает в вершину треугольничка, он поворачивает на 60 или 120 градусов. Докажите, что через некоторое время какие-то два жука окажутся в одной вершине маленького треугольничка.