

# Hardcore

10.03.2014

10 класс

1. Найдите все такие многочлены  $P(x)$  с целыми коэффициентами, что  $2^n - 1 \mid P(n)$  для любого натурального  $n$ .
2. Точки  $K$  и  $L$  на сторонах (не на продолжениях)  $AB$ ,  $AC$  треугольника - точки касания соответствующих вневписанных окружностей с соответствующими сторонами. Докажите, что прямая, соединяющая середины  $BC$  и  $KL$  делит периметр треугольника  $ABC$  пополам.
3. Решите в целых числах уравнение  $n^5 + n^4 = 7^m - 1$ .
4. Чевяны  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в точке  $X$ , причём  $A_1X = B_1X = C_1X$ . Докажите, что перпендикуляры, восстановленные в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  к сторонам  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  пересекаются в одной точке.
5. В графе степень каждой вершины не превосходит  $2k + 1$ . Докажите, что можно раскрасить его вершины в 2 цвета так, что бы ребра с разноцветными концами составляли не менее  $\frac{k+1}{2k+1}$  от общего числа ребер.
6. В графе степени всех вершин не меньше 2 и не больше 100. Доказать, что их можно покрасить в 101 цвет так, что любые две смежные вершины имели разный цвет и для любой вершины не все смежные с ней были одного цвета.