

Hardcore

10 класс

20.02.2014

1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ - неубывающая мультипликативная функция, т.е. для любых взаимно простых натуральных чисел m и n верно $f(mn) = f(m)f(n)$. Докажите, что $f(8)f(13) \geq f(10)^2$.
2. (*Письменно*) На берегу круглого озера расположено несколько пунктов. Между некоторыми из них установлено теплоходное сообщение. Известно, что между пунктами A и B тогда и только тогда курсируют теплоходы, когда между следующими за ними справа по берегу пунктами A' и B' теплоходы не курсируют. Докажите, что из любого пункта в любой другой пункт можно добраться теплоходом, причём не более чем с двумя пересадками.
3. В остроугольном треугольнике ABC прямыми соединили центры вневписанных окружностей I_A, I_B, I_C с серединами высот AA_1, BB_1, CC_1 . Докажите, что три проведённые прямые пересекаются в одной точке.
4. В клетки квадрата 100×100 расставили числа $1, 2, \dots, 10000$, каждое - по одному разу; при этом числа, различающиеся на 1, записаны в соседних по стороне клетках. После этого посчитали расстояния между центрами каждой двух клеток, числа в которых различаются ровно на 5000. Какое максимальное значение может принимать минимальное из посчитанных расстояний?