Геометрические неравенства. Движения и отражения.

10 класс

17.03.2014

Эллипс - геометрическое место точек X плоскости, для которых выполнено $F_1X + F_2X = d$, где F_1, F_2 - данные точки плоскости, называемые *фокусами*, а d - некоторое число, превосходящее длину отрезка F_1F_2. Касательной к эллипсу будем называть любую прямую, имеющую с ним ровно одну общую точку.

1. а. На плоскости даны две различные точки F_1, F_2 и прямая, через них не проходящая. Исследуйте на монотонность функцию $F_1X + F_2X$, найдите все её максимумы и минимумы (X - произвольная точка прямой).

   б. Докажите, что внутренность эллипса (т.е. все точки, для которых $F_1X + F_2X \leq d$) - выпуклое множество.

   в. Докажите, что касательная, проходящая через произвольную точку X эллипса с фокусами F_1, F_2, существует, единственна и является внешней биссектрисой угла F_1XF_2.

   г. Y - точка вне эллипса с фокусами F_1, F_2. Докажите, что минимум расстояния от Y до некоторой точки эллипса X существует и достигается, когда $\angle F_1XY = \angle F_2XY$.

2. В остроугольном треугольника ABC сторона BC - наименьшая. На этой стороне зафиксирована точка D. Циркулем и линейкой постройте такие точки B_1, C_1 на сторонах AC, AB соответственно, чтобы периметр треугольника DB_1C_1 был минимальным.

3. Докажите, что в треугольнике радиус описанной окружности не меньше удвоенного радиуса вписанной.

4. Внутри правильного треугольника ABC со стороной 1 расположена точка P. Докажите, что $AP + BP + CP \leq 2$.

5. (*Точка Торричелли*) Дан треугольник ABC, все углы которого меньше $120°$.

   а. Постройте с помощью циркуля и линейки такую точку P, чтобы она находилась внутри треугольника и его стороны из этой точки были видны под равными углами.

   б. Докажите, что минимум величины $AX + BX + CX$, где X - произвольная точка внутри треугольника, достигается при $X = P$.

6. Внутри остроугольного треугольника ABC площади S отмечена точка X. Докажите неравенство: $(AX + BX + CX)^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

7. В остроугольном треугольнике ABC сторона BC - наименьшая. B_1, C_1 - произвольные точки на сторонах AC, AB соответственно. Докажите, что длина ломанной BB_1C_1C не меньше удвоенной длины отрезка BC.