Ещё аффинные преобразования

10 класс

27.02.2014

1. а. Докажите, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей двух треугольников с параллельной стороной

   б. Докажите, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей двух треугольников.

   в. Докажите, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей многоугольников.

2. Из медиан треугольника составили новый треугольник. Найдите отношение площади построенного треугольника к площади исходного.

3. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC площади 1 отмечены точки A_1, B_1, C_1 так, что $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}$. Найдите площадь треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1.

4. Аффинное преобразование переставляет вершины треугольника ABC по циклу (т.е. A переводит в B, B - в C, C - в A). Найдите все неподвижные точки этого аффинного преобразования.

5. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Известно, что $A_1B_2 \parallel AB$, $B_1C_2 \parallel BC$, $C_1A_2 \parallel CA$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равновелики.

6. На сторонах большого четырёхугольника площади S лежат вершины маленького, на каждой стороне по одной вершине. Обозначим площади треугольников, примыкающих к углам большого четырёхугольника, S_A, S_B, S_C, S_D. Докажите неравенство: $\sqrt[3]{S_A} + \sqrt[3]{S_B} + \sqrt[3]{S_C} + \sqrt[3]{S_D} \leq 2\sqrt[3]{S}$.

7. *Эллипсом* будем называть множество точек плоскости, для которого существует аффинное преобразование, переводящее его в круг. Докажите, что существует эллипс наибольшей площади, вписанный в данный треугольник, и что этот эллипс точками касания делит стороны треугольника пополам.