

Аффинные преобразования

10 класс

20.02.2014

Определение. Преобразование плоскости называется аффинным, если оно взаимно однозначно, образом любой прямой является прямая и на каждой прямой сохраняется отношение отрезков.

1. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.
2. Докажите, что аффинное преобразование корректно определено на векторах, т.е. что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, где A', B', C', D' - образы A, B, C, D .
3. Докажите, что аффинное преобразование линейно, т.е. что для любых векторов \vec{a}, \vec{b} и для любого числа λ выполнены соотношения: $(\vec{a} + \vec{b})' = \vec{a}' + \vec{b}'$, $(\lambda \cdot \vec{a})' = \lambda \cdot \vec{a}'$.
4. Докажите, что для любых двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ плоскости существует единственное аффинное преобразование, переводящее точку A в A_1 , B в B_1 , C в C_1 .

5. Докажите, что существует аффинное преобразование, переводящее данную трапецию в равнобедренную.
6. На сторонах AC, AB треугольника ABC отмечены точки B_1, C_1 так, что $B_1C_1 \parallel BC$. На прямой B_1C_1 отметили точки B_2, C_2 так, что точки B_1, C_1 делят отрезок B_2C_2 на три равные части. Прямые BB_2, CC_2 пересекаются в точке X . Докажите, что прямая AX делит сторону BC пополам.
7. M - середина основания AD трапеции $ABCD$. Через точку P пересечения прямых BM и AC проведена прямая, параллельная основаниям, пересекающая BD в точке Q . Докажите, что точки P и Q делят отрезок прямой PQ , отсекаемый боковыми сторонами трапеции, на три равные части.
8. Точки A_1, B_1, C_1 делят стороны BC, CA и AB в одинаковом отношении. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $ABC, A_1B_1C_1$ и треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1 совпадают.
9. В треугольнике ABC чевианы BB_1, CC_1 пересекаются в точке X . Докажите, что середины отрезков AX, B_1C_1, BC лежат на одной прямой.
10. Докажите, что если у выпуклого пятиугольника каждая сторона параллельна одной из его диагоналей, то его можно аффинным преобразованием перевести в правильный.
11. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются в одной точке.