

# Аффинные преобразования

10 класс

20.02.2014

**Определение.** Преобразование плоскости называется аффинным, если оно взаимно однозначно, образом любой прямой является прямая и на каждой прямой сохраняется отношение отрезков.

1. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.
2. Докажите, что аффинное преобразование корректно определено на векторах, т.е. что если  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , то  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ , где  $A', B', C', D'$  - образы  $A, B, C, D$ .
3. Докажите, что аффинное преобразование линейно, т.е. что для любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  и для любого числа  $\lambda$  выполнены соотношения:  $(\vec{a} + \vec{b})' = \vec{a}' + \vec{b}'$ ,  $(\lambda \cdot \vec{a})' = \lambda \cdot \vec{a}'$ .
4. Докажите, что для любых двух треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  плоскости существует единственное аффинное преобразование, переводящее точку  $A$  в  $A_1$ ,  $B$  в  $B_1$ ,  $C$  в  $C_1$ .

---

5. Докажите, что существует аффинное преобразование, переводящее данную трапецию в равнобедренную.
6. На сторонах  $AC, AB$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $B_1, C_1$  так, что  $B_1C_1 \parallel BC$ . На прямой  $B_1C_1$  отметили точки  $B_2, C_2$  так, что точки  $B_1, C_1$  делят отрезок  $B_2C_2$  на три равные части. Прямые  $BB_2, CC_2$  пересекаются в точке  $X$ . Докажите, что прямая  $AX$  делит сторону  $BC$  пополам.
7.  $M$  - середина основания  $AD$  трапеции  $ABCD$ . Через точку  $P$  пересечения прямых  $BM$  и  $AC$  проведена прямая, параллельная основаниям, пересекающая  $BD$  в точке  $Q$ . Докажите, что точки  $P$  и  $Q$  делят отрезок прямой  $PQ$ , отсекаемый боковыми сторонами трапеции, на три равные части.
8. Точки  $A_1, B_1, C_1$  делят стороны  $BC, CA$  и  $AB$  в одинаковом отношении. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников  $ABC, A_1B_1C_1$  и треугольника, образованного прямыми  $AA_1, BB_1, CC_1$  совпадают.
9. В треугольнике  $ABC$  чевианы  $BB_1, CC_1$  пересекаются в точке  $X$ . Докажите, что середины отрезков  $AX, B_1C_1, BC$  лежат на одной прямой.
10. Докажите, что если у выпуклого пятиугольника каждая сторона параллельна одной из его диагоналей, то его можно аффинным преобразованием перевести в правильный.
11. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются в одной точке.