

## Алгебра. Разнойой.

10 класс

30.01.14

1. При любом действительном  $a$  решите уравнение:

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

2. Последовательность многочленов  $F_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) задана соотношениями  $F_{n+1}(x) = xF_n(x) - F_{n-1}(x)$ ,  $F_0(x) = 2$ ,  $F_1(x) = x$ . Докажите, что при простом  $p$  все, кроме одного, коэффициенты многочлена  $F_p(x)$  делятся на  $p$ .
3. Докажите, что если  $x_1$  и  $x_2$  - корни уравнения  $x^2 - 6x + 1 = 0$ , то  $x_1^n + x_2^n$  при любом натуральном  $n$  является целым числом, не делящимся на 5.
4. Ненулевые числа  $a, b, c$  таковы, что любые два из трёх уравнений  $ax^{11} + bx^4 + c = 0$ ,  $bx^{11} + cx^4 + a = 0$ ,  $cx^{11} + ax^4 + b = 0$  имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.
5. Докажите, что при любых значениях действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  имеет место неравенство

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2}$$

---

## Алгебра. Разнойой.

10 класс

30.01.14

1. При любом действительном  $a$  решите уравнение:

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

2. Последовательность многочленов  $F_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) задана соотношениями  $F_{n+1}(x) = xF_n(x) - F_{n-1}(x)$ ,  $F_0(x) = 2$ ,  $F_1(x) = x$ . Докажите, что при простом  $p$  все, кроме одного, коэффициенты многочлена  $F_p(x)$  делятся на  $p$ .
3. Докажите, что если  $x_1$  и  $x_2$  - корни уравнения  $x^2 - 6x + 1 = 0$ , то  $x_1^n + x_2^n$  при любом натуральном  $n$  является целым числом, не делящимся на 5.
4. Ненулевые числа  $a, b, c$  таковы, что любые два из трёх уравнений  $ax^{11} + bx^4 + c = 0$ ,  $bx^{11} + cx^4 + a = 0$ ,  $cx^{11} + ax^4 + b = 0$  имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.
5. Докажите, что при любых значениях действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  имеет место неравенство

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \dots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2} \geq \frac{n\sqrt{2}}{2}$$