

Старый новый разнбой

10 класс

13.01.14

1. Для десяти натуральных чисел посчитали все их попарные НОДы. Могут ли 45 полученных чисел равняться $1, 2, \dots, 45$?
2. Решите уравнение: $1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = 0$
3. На плоскости отмечены точки с целочисленными координатами. Одна из них покрашена в желтый цвет и названа точкой A . Рассматривается множество всех точек X плоскости, таких, что для каждой из них существуют ровно 1000 отмеченных точек B_i , таких, что $XB_i < XA$. Найти площадь геометрического места точек X .
4. Треугольник ABC таков, что $AB + BC = 2AC$. Докажите, что точка B , центр вписанной окружности треугольника ABC и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности.
5. $p > 5$ - простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби $\frac{1}{p}$ равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два n - значных куса, то сумма чисел в этих кусах равна $99\dots9$ (n девяток).
6. В ряд расположены 10 карточек, на которых написаны десять попарно различных чисел. За один ход разрешается взять любую карту и переложить ее на любое место в этом ряду. Доказать, что за 6 ходов всегда можно добиться того, чтобы числа на карточках располагались по порядку (возрастая или убывая).
7. В квадрате 100×100 расставлены числа. Разрешается задать вопрос о сумме чисел внутри любого квадрата $1 \times 1, 2 \times 2, \dots, 100 \times 100$, содержащегося в данном (и получить правильный ответ). За какое наименьшее количество вопросов можно узнать сумму чисел, стоящих на диагонали квадрата?