

# Старый новый разнбой

10 класс

13.01.14

1. Для десяти натуральных чисел посчитали все их попарные НОДы. Могут ли 45 полученных чисел равняться  $1, 2, \dots, 45$ ?
2. Решите уравнение:  $1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = 0$
3. На плоскости отмечены точки с целочисленными координатами. Одна из них покрашена в желтый цвет и названа точкой  $A$ . Рассматривается множество всех точек  $X$  плоскости, таких, что для каждой из них существуют ровно 1000 отмеченных точек  $B_i$ , таких, что  $XB_i < XA$ . Найти площадь геометрического места точек  $X$ .
4. Треугольник  $ABC$  таков, что  $AB + BC = 2AC$ . Докажите, что точка  $B$ , центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  и середины сторон  $AB$  и  $BC$  лежат на одной окружности.
5.  $p > 5$  - простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби  $\frac{1}{p}$  равна  $2n$ . Докажите, что если этот период разбить на два  $n$  - значных куска, то сумма чисел в этих кусках равна  $99\dots9$  ( $n$  девяток).
6. В ряд расположены 10 карточек, на которых написаны десять попарно различных чисел. За один ход разрешается взять любую карту и переложить ее на любое место в этом ряду. Доказать, что за 6 ходов всегда можно добиться того, чтобы числа на карточках располагались по порядку (возрастая или убывая).
7. В квадрате  $100 \times 100$  расставлены числа. Разрешается задать вопрос о сумме чисел внутри любого квадрата  $1 \times 1, 2 \times 2, \dots, 100 \times 100$ , содержащегося в данном (и получить правильный ответ). За какое наименьшее количество вопросов можно узнать сумму чисел, стоящих на диагонали квадрата?