Вписанный угол

10 класс

26.09.13

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром P пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что $\angle AQD = \angle BQC$.

2. Из точки M, двигающейся по окружности, опускаются перпендикуляры MP и MQ на диаметры AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

3. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C. Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B; окружность S_1 она пересекает в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

4. Докажите, что в остроугольном треугольнике середины двух высот, основание третьей и ортоцентр лежат на одной окружности.

5. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC - точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K - точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

6. Точки O и I — центры соответственно описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружности, описанные около треугольников ABC и OIA, пересекаются в точках A и D. Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около треугольника OIA.

7. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Через точку A окружности S_1 проведены прямые AM и AN, пересекающие S_2 в точках B и C, а через точку D окружности S_2 — прямые DM и DN, пересекающие S_1 в точках E и F, причем A, E, F лежат по одну сторону от прямой MN, а D, B, C — по другую. Докажите, что если $AB = DE$, то точки A, F, C и D лежат на одной окружности, положение центра которой не зависит от выбора точек A и D.

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из B на AK пересекает AC в точке L. Докажите, что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.