

# Теория чисел

10 класс

07.10.13

1. Пусть  $S(n)$  - сумма цифр числа  $n$ . Зададим последовательность  $a_{n+1} = S(a_n)$ ,  $a_0 = 2^{1000000}$ . Найдите  $a_6$ .
2. Сколько простых чисел содержится в последовательности: 101, 10101, 1010101, ... ?
3. Докажите, что для любого многочлена  $P$  с целыми коэффициентами, и для любого натурального  $k$ , существует такое натуральное число  $n$ , что  $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$  делится на  $k$ .
4. Докажите, что для любого натурального числа  $n$  существует число, делящееся на  $n$ , состоящее только из единиц и нулей.
5. Про натуральные числа  $a, b, c$  известно, что:  $ab + 9b + 81 \div 101$ ,  $bc + 9c + 81 \div 101$ . Докажите тогда, что  $ca + 9a + 81 \div 101$ .
6. Докажите, что для любого натурального  $n$ :  $2^{3^n} + 1$  делится на  $3^{n+1}$ , и не делится на  $3^{n+2}$ .
7. Пусть дана последовательность из чисел  $a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ . Существует ли пять подряд идущих чисел последовательности, делящихся на 23?
8. Дано натуральное число  $a$ . Докажите, что среди чисел вида  $2^n - a$  найдутся числа со сколь угодно большими простыми делителями.