Разнобой

10 класс

25.11.2013

1. В кучке лежит 2013 камней. За ход разрешается из одной кучки забрать один камень и разделить её на две непустые. Можно ли такими операциями оставить во всех кучках по три камня?

2. В квадрате $n \times n$ отмечены некоторые клетки. С каждой из клеток ассоциирован прямоугольник, содержащий её и левую нижнюю клетку квадрата в качестве угловых. Изначально в каждой отмеченной клетке стоит число, равное количеству отмеченных клеток в ассоциированном с ней прямоугольнике. За ход в каждой отмеченной клетке число заменяется на сумму всех чисел в ассоциированном с ней прямоугольнике (все числа изменяются одновременно). Докажите, что в какой-то момент все числа в отмеченных клетках станут нечётными.

3. Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Точки P, Q лежат на прямых A_1C_1, A_1B_1 соответственно, при этом $AP \parallel A_1B_1$, $AQ \parallel A_1C_1$. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

4. Дано 100 натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать несколько из них так, чтобы сумма выбранных делилась на 100.

5. I_B, I_C - центры вневписанных окружностей треугольника ABC (угадайте каких), касающихся прямой BC в точках L_B, L_C соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых L_BI_C и L_CI_B лежит на высоте треугольника.

6. Натуральное число a обладает свойством, что $4a^n + 4$ - точный куб при любом натуральном n. Докажите, что $a = 1$.

7. $a_1, \dots, a_n$ - различные целые числа. Докажите, что многочлен $(x - a_1)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$ невозможно представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

8. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причём каждый из них имеет среди присутствующих не более $n - 1$ врагов. Докажите, что Мерлин - советник Артура - может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.