

Принцип крайнего

10 класс

23.09.13

1. Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
2. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$ не имеет решений в натуральных числах.
3. Докажите, что у любого многогранника существуют две грани с одинаковым количеством сторон.
4. Доказать, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдется бесконечное количество чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.
5. В некоторой стране 100 аэродромов, причем все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолет и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь больше пяти самолетов.
6. В вершинах выпуклого n -угольника расставлены m фишек ($m > n$). За один ход разрешается передвинуть две фишки, стоящие в одной вершине, в соседние вершины: одну — вправо, вторую — влево. Докажите, что если после нескольких ходов в каждой вершине n -угольника будет стоять столько же фишек, сколько и вначале, то количество сделанных ходов кратно n .
7. Докажите, что любой выпуклый многоугольник площади 1 можно поместить в прямоугольник площади 2.
8. На плоскости расположено $\left[\frac{4}{3}n \right]$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с n прямоугольниками. Доказать, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми прямоугольниками.
9. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый пятиугольник с вершинами в узлах решетки. Докажите, что существует узел решетки строго внутри пятиугольника.
10. На берегу круглого острова Гдетотам расположено 20 деревень, в каждой живет по 20 борцов. Был проведен турнир, в котором каждый борец встретился со всеми борцами из всех других деревень. Деревня A считается сильнее деревни B , если хотя бы k поединков между борцами из этих деревень заканчивается победой борца из деревни A . Выяснилось, что каждая деревня сильнее следующей за ней по часовой стрелке. Какое наибольшее значение может иметь k ? (У всех борцов разная сила, и в поединке всегда побеждает сильнейший.)