Многочлены с целыми и рациональными коэффициентами

Определение. Пусть $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$. *Содержанием многочлена* $P(x)$ называется НОД коэффициентов многочлена $P(x)$.

1. **Лемма Гаусса.** Произведение многочленов с содержанием 1 является многочленом с содержанием 1.
2. Докажите, что а) всякий многочлен $S(x) \in \mathbf{Q}[x]$ можно представить в виде $S(x) = \frac{k}{l}P(x)$, где $k, l \in Z$, $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ и содержание $P(x)$ равно 1; б) $P(x)$ определен однозначно с точностью до знака.
3. Многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ неприводим в $\mathbf{Z}[x]$ тогда и только тогда, когда он неприводим в $\mathbf{Q}[x]$.
4. (**Основная теорема арифметики для многочленов в $\mathbf{Z}[x]$**) В $\mathbf{Z}[x]$ разложение на неприводимые множители однозначно с точностью до умножения на константу.
5. Дан многочлен $P(x)=(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)-1$, где $a_1, \ldots, a_n$ – различные целые числа. Докажите, что $P(x)$ неприводим в $\mathbf{Q}[x]$.
6. (**Критерий Эйзенштейна**). Многочлен с целыми коэффициентами, у которого старший коэффициент не делится на простое число p, все остальные коэффициенты делятся, причем свободный член не делится на p^2, не приводим в $\mathbf{Z}[x]$.
7. Докажите с помощью критерия Эйзенштейна, что $x^6 + x^3 + 1$ неприводим в $\mathbf{Q}[x]$.
8. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$ при простых p не раскладывается на множители с целыми коэффициентами.
9. Дан многочлен $P(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2 \ldots (x-a_n)^2 + 1$ где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – различные целые числа. Докажите, что $P(x)$ неприводим в $\mathbf{Q}[x]$.