Многочлены

10 класс

30.09.13

1. $f(x)$ - квадратный трёхчлен. Для какого наибольшего количества натуральных значений n может быть верно $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$.

2. $ax^5 + bx^4 + c$ имеет хотя бы три различных действительных корня. Докажите, что $cx^5 + bx + a$ имеет хотя бы три различных действительных корня.

3. $P(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами, такой что $P(20) = P(13) = 2013$. Найдите значение свободного члена, если известно, что модуль его значения меньше 100.

4. Даны вещественные числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3. Известно, что $x_1 < x_2 < x_3$, $y_1 < y_2 < y_3$, $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3$. Докажите, что если $x_1 < y_1$, то $x_2 > y_2$ и $x_3 < y_3$.

5. Может ли многочлен с целыми коэффициентами в натуральных точках принимать конечное число составных значений?

6. $f(x) = x^3 - 4x, g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Докажите, что для любых действительных α и β $(\alpha + \beta \neq 0)$ многочлен $\alpha f(x) + \beta g(x)$ имеет три различных действительных корня.

7. Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что если $-2 \leq a + b + c \leq 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0, 2]$.

8. $f(x)$ и $h(x)$ - приведённые квадратные трёхчлены, графики которых имеют общую точку. $g(x)$ - непостоянный многочлен. Оказалось, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для любого x. Докажите, что $f(x) = h(x)$.