# Метод Штурма

*10 класс*

*17.10.13*

1. Докажите, что при сближении двух чисел с сохранением их суммы

   а. Их произведение увеличивается.

   б. Их сумма квадратов уменьшается.

   в. Их сумма $n$-ных степеней уменьшается.

2. Докажите, что при сближении двух чисел с сохранением их произведения

   а. Их сумма уменьшается.

   б. Их сумма квадратов уменьшается.

3. Докажите неравенства между средними (слева на право: среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратическое)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

4. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.
   Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} \geq (n-1)^n$$

5. Пусть неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{1}{2}$.
   Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)} \geq \frac{1}{3}$$

6. Докажите, что $0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$, при $x, y, z \geq 0$ и $x+y+z=1$.

7. Докажите, что $abc+bcd+cda+dab \leq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$, где $a, b, c, d > 0$ и $a+b+c+d=1$.

8. Докажите, что из всех выпуклых $n$ - угольников, вписанных в данную окружность, наибольшим является периметр правильного.

9. Докажите неравенство для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\left(1+\frac{1}{a_1(1+a_1)}\right)\left(1+\frac{1}{a_2(1+a_2)}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n(1+a_n)}\right) \geq \left(1+\frac{1}{a(1+a)}\right)^n$$

   , где $a$ - среднее геометрическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.