

# Комбинаторная геометрия

10 класс

14.10.13

1. Могут ли в выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$  углы  $ACD$ ,  $BDE$ ,  $CEA$ ,  $DAB$ ,  $EBC$  быть тупыми?
2. Можно ли на столе положить некоторое количество монет (необязательно одинакового радиуса) так, чтобы каждая касалась шести других?
3. Вершины выпуклого пятиугольника расположены в узлах решетки. В пятиугольнике провели все диагонали. Докажите, что существует узел решетки внутри маленького пятиугольника.
4. На прямой расположено  $2n + 1$  отрезков. Каждый из них пересекает не менее  $n$  других. Докажите, что один из отрезков пересекает все остальные.
5. Докажите, что любые два непересекающихся выпуклых многоугольника можно отделить друг от друга прямой (*теорема Хана – Банаха*).
6. Внутри выпуклого  $n$ -угольника отмечена точка. Докажите, что ее проекция на одну из сторон попадет строго на сторону, а не на продолжение.
7. На плоскости дано  $n$  различных точек. Отметили середины всех отрезков их соединяющих. Докажите, что отметили хотя бы  $2n - 3$  различные точки.
8.  $X$  - непустое множество векторов а) на прямой б) на плоскости, удовлетворяющее следующим свойствам:
  - а. Если  $v \in X$ , то  $-v \in X$ .
  - б. Если  $v \in X$  и  $w \in X$ , то  $v + w \in X$ .
  - в. Любой ненулевой вектор из  $X$  имеет длину не менее 1.

Докажите, что найдётся а) вектор  $e$  из  $X$ , такой что любой вектор из  $X$  равен  $k \cdot e$ , где  $k$  - целое. б) пара векторов  $e_1, e_2$  из  $X$  такая, что любой вектор из  $X$  равен  $k \cdot e_1 + l \cdot e_2$ , где  $k, l$  - целые.