

# Классическая комбинаторика

10 класс

02.12.13

1. Докажите, что  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

2. Найдите

а.  $\sum_{k=0}^n C_n^k$

б.  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$

3. Найдите количество способов разложить

а.  $n$  различных шаров по  $m$  различным ящикам.

б.  $n$  одинаковых шаров по  $m$  различным ящикам.

4. Вычислите

а.  $\sum_{k=0}^n k C_n^k$

б.  $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k$

5. Найдите сумму  $\sum_{k=0}^m C_{n+k}^m$

6. Чему равна сумма  $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$  ?

7. Найдите значение суммы  $\sum_{4|k} C_n^k$

8. Докажите, что количество способов разбить  $n$  одинаковых шаров по  $m$  одинаковым ящикам равняется количеству способов разбить число  $n$  на слагаемые, каждое не большее  $m$ . (разбиение  $2+3$  и  $3+2$  — одно и то же).

9. Обозначим через  $S(n, m)$  количество разбиений  $n$  различных шаров по  $m$  одинаковым ящикам (число Стирлинга второго рода).

а. Докажите тождество  $S(n, m) = S(n-1, m-1) + mS(n-1, m)$

б. Обозначим  $B_n = \sum_{m=0}^n S(n, m)$  (число Белла). Докажите, что  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k$

в. Докажите, что  $S(n+1, m+1) = \sum_{k=0}^{n-m} C_n^k S(n-k, m)$

10. Докажите тождество  $\sum_{k \geq 0} C_{a+b}^{a+k} C_{b+c}^{b+k} C_{c+a}^{c+k} (-1)^k = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$