

# Инвариант

10 класс

24.10.13

1. На доске написано число 1234. Разрешается к числу либо прибавить по единице к двум соседним цифрам, либо вычесть по единице (если среди них нет девяток, нулей соответственно). Можно ли получить число 2013?
2. На доске написаны числа  $1, 2, 3, \dots, 20$ . Разрешается стереть любые два числа  $a$  и  $b$  и записать вместо них число  $ab + a + b$ . Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?
3. В квадрате  $4 \times 4$  клетка, соседняя с угловой — черная, а остальные — белые. Можно перекрашивать все клетки любого столбца, строки или диагонали (не обязательно главной). Докажите, что такими операциями нельзя получить целиком белый квадрат.
4. Какое максимальное количество диагональных ходов может совершить король, обойдя всю шахматную доску по пути без самопересечений? (Король ходит на любую соседнюю клетку по стороне или вершине)

# Полуинвариант

1. Таблица  $15 \times 15$  заполнена плюсами и минусами. Разрешается выбрать любую строку или любой столбец и поменять все стоящие там знаки на противоположные. Докажите, что несколькими такими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце плюсов было больше, чем минусов.
2. На плоскости дано  $2N$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой,  $N$  из них окрашены в красный цвет, остальные в синий. Докажите, что эти точки можно соединить  $N$  непересекающимися отрезками, каждый из которых будет соединять красную точку с синей.
3. По окружности расставлены  $n$  чисел. Если подряд стоят числа  $a, b, c$  и  $d$  и при этом  $(a - d)(b - c) > 0$ , то числа  $b$  и  $c$  разрешается поменять местами. Докажите, что через несколько шагов нам не удастся произвести ни одной такой перестановки.
4. Шахматная доска разбита на доминошки. К правой верхней клетке добавлена одна клетка справа (первая строка состоит из 9 клеток, остальные — из 8). Разрешается вынимать любую доминошку и класть ее на две пустые соседние клетки. Докажите, что все доминошки можно расположить горизонтально.