

Функция Эйлера

10 класс

09.12.13

1. Докажите, что $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_s) = m$, где суммирование ведется по всем делителям числа m .
2. а. Пусть $(a,b)=1$. Докажите, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Это свойство называется мультипликативностью.
б. Пусть $m = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k}$. Докажите, что $\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_k})$.
3. а. Докажите теорему Эйлера. Пусть $(a, m) = 1$, тогда $a^{\varphi(m)} - 1$ делится на m .
б. Докажите усиление теоремы Эйлера. Положим $L(m) = \text{НОК}(\varphi(p_1^{t_1}), \dots, \varphi(p_k^{t_k}))$. Тогда, если $(a, m) = 1$, то $a^{L(m)} - 1$ делится на m .
4. Дано число 2^{2013} . Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.
5. Докажите, что для каждого n существует числа с суммой цифр n , делящееся на n .
6. Докажите, что $\varphi(a^n - 1)$ делится на n .
7. Рациональное число $\frac{p}{q}$ (q взаимно просто с 10) представили в виде периодической десятичной дроби. Докажите, что ее период является делителем $\varphi(q)$.
8. Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами пишется их сумма и т.д. Докажите, что число n в итоге будет выписано ровно $\varphi(n)$ раз.