

## Питерские графы, которые Глеб ещё не решил

1. На математическом факультете учатся 40 юношей и 10 девушек. Каждая девушка дружит либо в точности со всеми теми юношами, кто старше её, либо в точности с теми, кто выше её. Докажите, что у каких-то двух юношей множества подруг совпадают.
2. Некоторые города России соединены с некоторыми городами Украины международными авиалиниями. Межгосударственный совет по содействию миграции собирается ввести на каждой авиалинии одностороннее движение так, чтобы, вылетев из города, в него уже нельзя было вернуться (пользуясь другими односторонними авиалиниями). Докажите, что количество способов сделать это не делится на три.
3. В стране 2010 городов и из каждого выходит по три дороги. Президент и премьер-министр по очереди продают дороги одной из трех компаний. Первым ходит премьер. Президент хочет, чтобы хотя бы из одного города выходили дороги одной компании, а премьер хочет ему помешать. Кто выигрывает?
4. В стране несколько городов и из каждого выходит не менее 2008 дорог. Каждую дорогу красят в один из двух цветов. Докажите, что существует несамопересекающийся одноцветный циклический маршрут длины хотя бы 504.
5. В стране 10000 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Из каждого города выходит меньше 100 дорог. Любой циклический маршрут нечетной длины содержит хотя бы 101 дорогу. Докажите, что можно разбить страну на 100 групп из 100 городов, чтобы каждая дорога связывала города из разных групп.
6. В графе  $n > 3$  вершин. При удалении ребер любого цикла он становится несвязен. Какое наибольшее число ребер может быть в таком графе?
7. На Марсе 2007 стран и более 2007 городов. Из каждого марсианского города выходит равно 2006 дорог, соединяющих его с городами всех других стран. Известно, что из каждого города можно попасть в каждый по дорогам. Докажите, что существует замкнутый несамопересекающийся маршрут длины не менее 4012.
8. В стране 1000 городов, некоторые пары соединены дорогами. Оказалось, что один из концов любой дороги является городом, из которого выходит не более 10 дорог. Какое наибольшее число дорог может быть в стране?