

Графы: подсчеты и оценки

1. Среди графов на n вершинах каких больше — связных или несвязных?
2. Какое наименьшее число соединений требуется для организации проводной сети связи из 10 узлов, чтобы при выходе из строя любых двух узлов связи сохранялась возможность передачи информации между любыми двумя оставшимися (хотя бы по цепочке через другие узлы)?
3. На встречу выпускников пришло 45 человек. Оказалось, что любые двое из них, имеющие одинаковое число знакомых среди пришедших, не знакомы друг с другом. Какое наибольшее число пар знакомых могло быть среди участвовавших во встрече?
4. (a) Докажите, что если в графе на n вершинах нет треугольников, то в нем не более $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ ребер.
(b) *Теорема Турана.* Пусть в графе на n вершинах нет подграфа, изоморфного K_m (полный граф на m вершинах). Докажите, что в нем не больше ребер, чем в полном $(m-1)$ -дольном графе на n вершинах с почти равными долями. Граф называется полным k -дольным, если множество его вершин разбито на k подмножеств, проведены все ребра между вершинами из разных подмножеств и нет ребер внутри подмножеств. Под почти равными долями подразумевается, что размеры этих подмножеств отличаются не больше, чем на один.
5. (a) Пусть в графе на n вершинах нет циклов длины 4. Докажите, что в нем не более $\frac{(n-1)^2}{4}$ ребер.
(b) Докажите, что наибольшее число ребер в графе без циклов длины 4 на девяти вершинах равно 15.
(c) Докажите, что наибольшее число ребер в графе без циклов длины 4 на n вершинах не более $\frac{n}{4} (1 + \sqrt{4n + 3})$.
6. В графе 2000 вершин, причем степень каждой является степенью двойки. Для каждой вершины подсчитали число маршрутов длины не более 2, выходящих из нее. Просуммировали полученные выражения по всем вершинам. Могло ли получиться 100000?