

## Ничто не вечно под луной, кроме комбинаторной геометрии

1. Для любого  $N$  докажите, что при желании Любитель Чисел обеспечен деятельностью более чем на  $N$  дней.
2. Для любого  $N$  докажите, что и Леонард Диксон, и Грэхем Хигмен могут заниматься заполнением тетрадошки дольше  $N$  дней.
3. В таблице  $m \times n$  расставлены числа. За один ход можно поменять знак или у всех чисел строки, или у всех чисел столбца.
  - (a) докажите, что можно добиться того, чтобы сумма в каждой строке и в каждом столбце была неотрицательна.
  - (b) докажите, что этого можно добиться за  $\frac{m+n}{2} + 1$  ходов.
4. С многоугольником разрешено проделывать следующую операцию. Если многоугольник делится отрезком  $AB$  на два многоугольника, то один из этих многоугольников можно отразить симметрично относительно *серединного перпендикуляра* к отрезку  $AB$ . (После этого многоугольники обратно сливаются в один по отрезку  $AB$ . Операция разрешается только в том случае, когда части многоугольника после отражения не пересекаются и не касаются ни в каких точках, кроме отрезка  $AB$ .) Можно ли путем нескольких таких операций получить из квадрата правильный треугольник?
5. Докажите, что существуют равновеликие многоугольники, которые нельзя разбить на многоугольники (возможно, невыпуклые), переводящиеся друг в друга параллельным переносом. (Исходные многоугольники задаются вместе со своим положением на плоскости, так что их нельзя поворачивать перед разбиением.)
6. Докажите, что выпуклый многоугольник нельзя разрезать на конечное число невыпуклых четырехугольников.
7. Множество точек на плоскости будем называть *алгебраическим*, если его можно задать как множество решений некоторой системы алгебраических уравнений. (Алгебраическое уравнение — это  $P(x, y) = 0$ , где  $P$  — многочлен от двух переменных.) Докажите, что не существует бесконечной цепочки вложенных алгебраических множеств.