

Ничто не вечно под луной

1. Рассматриваем наборы из n натуральных чисел (x_1, \dots, x_n) , сравнивая их лексикографически (то есть набор (x_1, \dots, x_n) меньше набора (y_1, \dots, y_n) , если для некоторого i выполнено $x_1 = y_1, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}$ и $x_i < y_i$). Докажите, что не может быть бесконечной убывающей последовательности из таких наборов.
2. В стране несколько городов и из каждого выходит нечетное число дорог. В каждом городе погода или хорошая или так себе.
 - (a) Каждое утро в одном из городов, у которого у большинства соседей погода другая, радикально меняют метеорологические условия. Может ли это продолжаться бесконечно?
 - (b) а если меняют одновременно во всех таких городах?
3. На плоскости проведено несколько отрезков. За одну операцию разрешается пересекающиеся отрезки AB и CD заменить на AC и BD . Можно ли производить эти замены бесконечно?
4.
 - (a) Любитель Чисел каждое утро выписывает на доску новое натуральное число, причем так, чтобы новое число не могло быть представлено в виде суммы нескольких (возможно, с повторениями) предыдущих. Сможет ли он заниматься этим вечно?
 - (b) Абстрактный Алгебраист каждое утро выписывает на доску новый многочлен, причем так, чтобы он не выражался как многочлен от уже выписанных. Сможет ли он заниматься этим вечно?
 - (c) а если многочлен от двух переменных?
5.
 - (a) Леонард Диксон каждый вечер пишет в тетрадочке набор из 1626 натуральных чисел. Если однажды среди написанных наборов найдутся два таких, что один из них будет покомпонентно не меньше другого, то Грэхему Хигмену подарят тетрадочку. Докажите, что тетрадочку таки подарят.
 - (b) Грэхем Хигмен каждый вечер пишет в тетрадочке последовательность букв английского алфавита. Если однажды окажется, что среди написанных есть две, одна из которых получается из другой выкидыванием части символов, всем станет хорошо. Докажите, что когда-нибудь всем таки станет хорошо.
- 6.* На полке стоит собрание сочинений Льва Толстого в некотором порядке. Каждое утро Юлик берет произвольный (случайный) том, стоящий не на своем месте, вынимает его и вставляет на правильное место, сдвигая (но не переставляя) остальные книги. Сможет ли Юлик заниматься этим вечно?