

## Какие-то многочлены

1. Даны многочлены  $P(x)$  и  $Q(x)$ . Известно, что для некоторого многочлена  $R(x, y)$  выполнено

$$P(x) - P(y) = R(x, y) \cdot (Q(x) - Q(y)).$$

Докажите, что существует многочлен  $S$  такой, что  $P(x) = S(Q(x))$ .

2. (а) Докажите, что число положительных корней многочлена с действительными коэффициентами не больше числа перемен знака в последовательности коэффициентов.  
(б) Докажите, что эти числа отличаются на четное число.
3. Пусть  $p(x)$  — многочлен степени  $n$ , имеющий ровно  $n$  различных действительных корней. Докажите, что множество решений неравенства  $\frac{p'(x)}{p(x)} > 1$  является объединением конечного числа интервалов, и найдите их суммарную длину.
4. Пусть имеются два упорядоченных набора чисел  $x_1 < x_2 < \dots < x_7$  и  $y_1 < y_2 < \dots < y_7$ . Известно, что  $x_1 < y_1$  и суммы  $k$ -ых степеней равны для всех  $k$  от 1 до 6. Докажите, что  $x_7 < y_7$ .
5. Докажите, что корни производной лежат внутри выпуклой оболочки корней многочлена.
6. Для данного набора положительных чисел  $x_1, \dots, x_n$  через  $\sigma_k$  будем обозначать элементарный симметрический многочлен степени  $k$ . Докажите, что при  $k > m$  верно

$$\sqrt[m]{\frac{\sigma_m}{C_n^m}} \geq \sqrt[k]{\frac{\sigma_k}{C_n^k}}.$$

7. Придумать ограниченный снизу многочлен от двух переменных, который не принимал бы своего инфимума.