

Производящие функции

- (a) Последовательность задана соотношением $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$ и условием $a_0 = 1, a_1 = 2$. Найдите формулу общего члена.

(b) Напишите ряд для $1/(1+x)^k$.
- (a) Числа Каталана заданы рекуррентным соотношением $C_n = C_{n-1}C_0 + \dots + C_0C_{n-1}$ и условием $C_0 = C_1 = 1$. Найдите формулу общего члена.

(b) Введем обозначение

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Докажите для рациональных α справедливость разложения

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k.$$

- Представьте количество шестерок цифр с суммой 27 в виде коэффициента в многочлене и вычислите это количество.
- (a) Через p_n будем обозначать количество представлений числа n в виде суммы неупорядоченного набора натуральных чисел. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

(b) Выведите формулу для коэффициентов ряда $\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)$.

- При помощи производящей функции доказать, что количество помеченных деревьев на n вершинах равно n^{n-2} .