Комбинаторика слов

Определение. *Двоичное слово* — слово, состоящее из нулей и единиц. Нули и единицы в этом контексте будут иногда называться буквами.

1. Министерство Цензуры некоторые (конечное или бесконечное число) конечные двоичные слова объявила запрещёнными. Оказалось, что для любого n существует двоичное слово длины n, не содержащее запрещённых подслов. Докажите, что существует бесконечное двоичное слово без запрещённых подслов.

2. Министерство Цензуры запретило бесконечный счётный набор конечных двоичных слов, при этом длина первого слова 100, второго – 100^2, третьего – 100^3 и так далее. Докажите, что существует бесконечное двоичное слово без запрещённых подслов.

3. В десятичном разложении числа x ровно сто подслов длины 100. Докажите, что x рациональное.

4. Докажите, что существует такое бесконечное двоичное слово, что любое конечное двоичное слово является его подсловом.

5. Министерство Цензуры запретило конечное число двоичных слов. $P(n)$ — число двоичных слов длины n, не содержащих запрещённых подслов. Рассмотрим формальный степенной ряд

$$g(x) = P(0) + P(1)\,x + \ldots + P(k)\,x^k + \ldots$$

Докажите, что этот ряд задаёт рациональную функцию (отношение двух многочленов).

Слово Фиббоначи

Рассмотрим отображение f, которое двоичные слова переводит в двоичные слова по следующему правилу: все нули одновременно заменяются на 01, а единицы — на нули. Пример:

$$f(1001101) = 0010100010.$$

Рассмотрим последовательность:

$$w_0 = 1 \qquad w_1 = 0 \qquad w_2 = 01 \qquad w_3 = 010 \qquad w_4 = 01001$$
$$w_5 = 01001010 \qquad \ldots \qquad w_{k+1} = f(w_k)$$

6. Покажите, что в этой последовательности каждое слово, начиная с w_1, является началом следующего.

Это значит, что можно рассмотреть предельное бесконечное слово

$$w = 01001010010\ldots,$$

которое будем называть *словом Фибоначчи.*

7. Пусть даны два вещественных числа α и β. Изначально кузнечик находится на прямой в точке 0. Он последовательно читает буквы слова Фиббоначи w и, если очередная буква оказывается нулём, прыгает на α вправо, а если единицей — на β влево. То есть после третьего шага он будет в точке $2\alpha - \beta$, после четвёртого — в $3\alpha - \beta$ и так далее.
Докажите, что если $\frac{\beta}{\alpha}$ не равно золотому сечению, то кузнечик сколь угодно далеко удалится от начального положения. Докажите также, что w непериодично.

8. Пусть в контексте предыдущей задачи $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = 1$. Докажите, что кузнечик не выйдет за пределы отрезка $[-\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1]$, причём после прыжков вправо всегда будет оказываться правее нуля, а после прыжков влево — левее нуля.

9. В условиях предыдущей задачи покажите, что прыжки кузнечика будут плотны на отрезке $[-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1]$. Выведите отсюда, что в слове Фибоначчи ровно $n+1$ слов длины n.