

## Линейность в геометрии

- (a) Докажите, что основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой.

(b) Докажите, что эта прямая перпендикулярна  $IO$ .
- (a) Докажите существование прямой Гаусса (прямой, проходящей через середины диагоналей и середину отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон).

(b) Докажите что, если четырехугольник описанный, то центр вписанной окружности лежит на прямой Гаусса.
- Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ , а продолжения сторон  $BC$  и  $AD$  — в точке  $Q$ . Получилось так, что три пары внешних биссектрис: при вершинах  $A$  и  $C$ , при вершинах  $B$  и  $D$  и при вершинах  $P$  и  $Q$  имеют точки пересечения. Докажите, что они лежат на одной прямой.
- Внутри треугольника  $ABC$  расположен треугольник  $PQR$ . Известно, что суммы расстояний от вершин треугольника  $PQR$  до сторон треугольника  $ABC$  равны. Докажите, что треугольник  $ABC$  правильный.
- Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного многоугольника до прямой, проходящей через его центр не зависит от выбора этой прямой.
- В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $M$ , угол между ними равен  $120^\circ$ ,  $AM = MD$ . На стороне  $BC$  выбрана произвольная точка  $E$ , через нее проведены прямые параллельные диагоналям, которые пересекают четырехугольник второй раз в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $PEQ$  лежит на прямой  $AD$ .
- С помощью циркуля и линейки постройте квадрат с вершинами на четырех заданных прямых.
- Дан выпуклый многогранник  $P$ . Из каждой его грани во вне этого многогранника проведен вектор равный по длине площади этой грани. Докажите, что сумма всех этих векторов равна нулю.
- 9.\* Даны три пересекающихся луча (каждый пересекается с ещё хотя бы одним). В какой-то момент времени по ним одновременно начинают двигаться точки с постоянными скоростями. Известно, что при этом они все время образуют треугольник (в частности, в начальный момент, т. е. совпадение вершин лучей запрещено) и центр его описанной окружности тоже движется по прямой с постоянной скоростью. Верно ли, что треугольник, образованный этими тремя точками все время подобен самому себе?

- 10.\*** Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$  и произвольная точка  $X$ . Пусть  $X_{AB}$ ,  $X_{BC}$ ,  $X_{CD}$ ,  $X_{DA}$ ,  $X_{AC}$ ,  $X_{BD}$  — проекции точки  $X$  на прямые  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ ,  $AC$  и  $BD$  соответственно. Докажите, что середины отрезков  $X_{AB}X_{CD}$ ,  $X_{BC}X_{DA}$  и  $X_{AC}X_{BD}$  лежат на одной прямой.
- 11.\*\*** Докажите, что если прямая пересекает три из четырех высот тетраэдра, то она пересекает и четвертую (или параллельна ей).