# Ряды Фарея и цепные дроби

## Ряды Фарея

**1.** Почему в дереве Фарея (a. k. a. дереве Штерна — Броко) каждое положительное рациональное число встретится ровно один раз?

**2.** Любые две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, у которых $ad - bc = 1$, будут соседями в каком-то ряду Фарея.

## Цепные дроби

**3.** Доведите доказательство того, что геометрический алгоритм (алгоритм «вытягивания носов») разложения в цепную дробь работает. Например, почему он сходится?

**4.** Докажите, что соседние подходящие дроби образуют треугольник площади 1/2.

В процессе разложения числа $\alpha$ в цепную дробь на каждом шаге оно оказывается зажато между двумя последовательными подходящими дробями $\frac{p_*}{q_*} < \alpha < \frac{p^*}{q^*}$, где $\frac{p_*}{q_*} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и $\frac{p^*}{q^*} = \frac{p_n}{q_n}$ в случае четного $n$, и наоборот для нечётного. При этом переход от предыдущей пары дробей к следующей осуществляется с помощью рекуррентной формулы

$$\frac{p_*}{q_*} := \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1}p^* + p_*}{a_{n+1}q^* + q_*}$$

(это для четного $n$ — для нечетного будет меняться $\frac{p^*}{q^*}$).
*Длинным способом* разложения будем называть такой же процесс, в котором вместо одного шага по формуле выше делается $a_n$ шагов

$$\frac{p_*}{q_*} := \frac{p^* + p_*}{q^* + q_*}.$$

**5.** Докажите, что если $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}, ad - bc = 1$, то при разложении числа $\alpha$ в цепную дробь *длинным способом* в какой-то момент оно окажется зажато между подходящими дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

## Как же связаны ряды Фарея и цепные дроби?

**Определение.** *Высотой* положительного рационального числа $n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ назовем число $h(n) = a_0 + \cdots + a_n$.

**Теорема.** Числа высотой ровно $n$ и числа, лежащие в $n$-ом слое дерева Фарея, совпадают.

**6.** Докажите теорему, связав геометрические интерпретации цепных дробей и рядов Фарея.

**7.** Попробуйте явно выписать, как связаны разложения в цепные дроби чисел $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{a+b}{c+d}$ (при $ad - bc = 1$).