# Теорема Холла

**1.** Есть некоторое количество юношей и девушек. Для любой группы юношей (пусть их $k$) известно, что число девушек, которые знакомы хотя бы с одним из них, не меньше $k$. Тогда каждому юноше можно выбрать в пару знакомую ему девушку так, чтобы пары не пересекались.

**2.** Квадрат со стороной 1 разбит двумя способами на $n$ равновеликих многоугольников. Докажите, что можно выбрать в квадрате $n$ точек, что в каждом многоугольнике любого из этих разбиений будет по выбранной точке.

**3.** Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из $N$ цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем $N$ фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался? *(У этой задачи есть решение без леммы Холла. Постарайтесь решить её все-таки с помощью леммы Холла.)*

**4.** **(a)** Есть натуральные числа $k \leqslant m < n$. В графе $G$ степени всех вершин не менее $m$ и не более $n$. Докажите, что можно выкинуть несколько ребер, чтобы степени стали не менее $m - k$ и не более $n - k$.

**(b)** В летний лагерь приехало некоторое количество школьников, причем каждый имеет от 50 до 100 знакомых среди остальных. Докажите, что вожатый Гриша сможет раздать им шапочки 1331 цветов так, чтобы у каждого школьника среди его знакомых было не менее 20 различных цветов.

**5.** Имеется граф $G$, все вершины которого имеют степень $2k$. Докажите, что из него можно выкинуть некоторое количество ребер, чтобы в оставшемся графе степень каждой вершины была равна двум.