

Бесконечность

1. По данным последней переписи населения, в РФ живет счетное число жителей. Кроме того, у каждого есть
 - (a) рубль
 - (b) ненулевое количество денег (не меньше копейки, конечно).Докажите, что они могут перераспределить деньги так, что все станут миллионерами.
2. Дана бесконечная последовательность функций f_1, f_2, \dots , действующих из \mathbb{R} в \mathbb{R} . Постройте функцию f такую, что для любого k существует x_0 , что $f(x) > f_k(x)$ при любом $x > x_0$.
3. Есть бесконечное дерево, подвешенное за корень R . Степень каждой вершины конечна. Докажите, что существует бесконечный путь, идущий от корня вниз.
4. Имеется язык, состоящий из всевозможных слов в конечном алфавите. Некоторые слова являются нецензурными. Слово называется литературным, если не содержит нецензурных подслов. Известно, что существует сколь угодно длинное литературное слово. Докажите, что существует бесконечное литературное слово.
5. Постройте функцию из \mathbb{Q} в себя, которая на любом отрезке принимала бы все возможные значения.
6. Докажите, что существуют такие два бесконечных множества целых неотрицательных чисел A и B , что любое целое неотрицательное число единственным образом представляется в виде $a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$.
7. Постройте такой конечный набор функций f_1, \dots, f_k , действующих из \mathbb{R} в \mathbb{R} , что любой многочлен с целыми коэффициентами является суперпозицией этих функций (то есть любой многочлен p имеет вид $p(x) = f_1(f_1(f_5(f_3(f_1(x))))))$).