Лемма Гензеля

Обозначение. Будем обозначать степень, в которой число p входит в разложение n на простые множители, через $\mathrm{ord}_p(n)$.

Лемма Гензеля. Пусть a, b — различные числа, k — натуральное, p — простое, не делящее a. Если выполнено одно из условий (1) или (2), то $\mathrm{ord}_p(a^k - b^k) = \mathrm{ord}_p(a-b) + \mathrm{ord}_p(k)$:

(1) $p \neq 2$ и $\mathrm{ord}_p(a-b) \geqslant 1$

(2) $p = 2$ и $\mathrm{ord}_p(a-b) \geqslant 2$

Доказательство. Предположим, что $a-b$ делится на p, причем a не делится на p. Докажите, что
(a) $\mathrm{ord}_p(a^p - b^p) > \mathrm{ord}_p(a-b)$;
(b) $\mathrm{ord}_p(a^s - b^s) = \mathrm{ord}_p(a-b)$, если s не делится на p;
(c) $\mathrm{ord}_p(a^k - b^k) \geqslant \mathrm{ord}_p(a-b) + \mathrm{ord}_p(k)$;
(d) если $p > 2$, то $\mathrm{ord}_p(a^p - b^p) = \mathrm{ord}_p(a-b) + 1$.
Докажите лемму Гензеля
(e) в случае (1); **(f)** в случае (2).

Задачи

1. В какой степени 5 входит в разложение на простые множители числа $3^{10000} - 2^{10000}$?

2. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

3. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

4. Найдите все четверки натуральных чисел (n, k, p, x), для которых $x > 2$, $n > 1$, p – простое, и $x^n = p^k + 1$.

5. Какое наибольшее число нулей может быть среди 6 последних цифр числа 2^n для $n > 100$?