# Раскраска графов

Раскраска вершин графа называется *правильной*, если соединенные ребром вершины имеют разные цвета.

**1.** **(a)** В графе вершины всех степеней не больше $d$. Докажите, что его можно покрасить правильным образом не более, чем в $d+1$ цвет.
**(b)** Степень каждой вершины графа не превосходит $d$. Даны также числа $d_1$, …, $d_n$ такие, что $d_1+\ldots+d_n+n=d+1$. Докажите, что вершины графа можно разбить на $n$ групп так, чтобы каждая вершина $i$-ой группы была соединена не более, чем с $d_i$ своих одногруппниц.

**2.** **(a)** В графе все циклы имеют четную длину. Докажите, что его можно покрасить правильным образом в 2 цвета.
**(b)** В графе через каждую вершину проходит не более $N$ непересекающихся циклов нечетной длины (имеется в виду, что любые два такие цикла пересекаются только по этой вершине). Докажите, что его можно покрасить в $2N+2$ цвета.

**3.** **(a)** В правильном $n$-угольнике провели несколько непересекающихся диагоналей. Докажите, что полученный граф можно покрасить правильным образом в три цвета.
**(b)** В графе 1000 вершин, причем степень каждой не больше 9. Докажите, что можно выбрать подграф на 200 вершинах, что в нем не будет нечетных циклов.

Пусть в графе $G$ вершины $u$ и $v$ соединены ребром. Тогда через $G-uv$ будем обозначать граф, в котором это ребро выкинуто, а через $G/uv$ — граф, в котором это ребро «стянуто».

Для графа $G$ через $\chi_G(k)$ будем обозначать количество правильных раскрасок в $k$ цветов.

**4.** **(a)** Выразите $\chi_G(k)$ через $\chi_{G-uv}(k)$ и $\chi_{G/uv}(k)$.
**(b)** Докажите, что $\chi_G(k)$ — многочлен от $k$.

**5.** Граф $G$ нельзя правильным образом покрасить менее, чем в $k$ цветов. Докажите, что в любой его правильной раскраске в $k$ цветов есть путь, в котором есть ровно по одной вершине каждого цвета.

**6.** В графе все вершины имеют степень три. Рассматриваем раскраски его ребер в три цвета так, что в каждой вершине сходятся ребра разных цветов. Известно, что количество таких раскрасок сравнимо с 2 по модулю 4. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.

**7.** В связном графе $G$ 500 вершин, степень каждой вершины не превосходит 3. Назовем раскраску вершин в черный и белый цвета *интересной*, если белым цветом окрашено более половины вершин, но никакие две белые вершины не соединены ребром. Докажите, что можно выбрать несколько вершин $G$ так, чтобы в любой интересной раскраске больше половины из них были бы окрашены в черный цвет.