Вероятность

Вводная болтовня + клёвая задача

Это занятие посвящено тому, чтобы показать, что теория вероятностей не является разделом комбинаторики и не исчерпывается рассуждениями в стиле «посчитал число нужных вариантов, посчитал число всех вариантов, поделил». Во многих вероятностных задачах, где комбинаторы мгновенно погрязнут в вычислениях, можно обойтись «малой кровью», если думать немножко вероятностно.

1. На числовой прямой в точке ноль стоит талантливый мальчик Петя Торт. Каждую секунду он с вероятностью 0.5 делает шаг на единицу влево, а с вероятностью 0.5 — вправо. Докажите, что для любого целого k вероятность того, что он рано или поздно окажется в k, равна единице.

Эта задача является не только примером довольно эффектного вероятностного рассуждения, но частью совершенно удивительного математического факта: дело в том, что такое же утверждение для узлов двумерной целочисленной решетки (когда Петя идет с вероятностью 0.25 вправо, влево, вверх или вниз) верно, но оно перестает быть верным, когда размерность пространства равна хотя бы трем!

Очевидно, что за N шагов Петя не сможет уйти от точки 0 на расстояние больше N. Однако хотелось бы понять, насколько далеко он уйдет «в большинстве случаев». Оказывается, Петя с большой вероятностью не уйдет дальше расстояния порядка $\sqrt{N}$. Установить этот факт и будет нашей ближайшей целью. Кстати, представьте себе его комбинаторный вывод и ужаснитесь.

Случайные величины и их ожидания

Для этого нам необходимо будет ввести базовые понятия теории вероятностей. Будем придерживаться такого интуитивного понимания понятия вероятности: будем считать, что у нас есть множество параллельных миров — в некоторых, например, на кубике выпадает 1, а в некоторых 5. В частности, на каждую траекторию Пети приходится хотя бы по одному миру. *Вероятностью* события тогда является «доля» миров, где оно произошло.

Случайной величиной будем называть функцию на этом самом множестве миров (то есть некоторый аппарат, который каждому миру сопоставляет число). Примером таких функций могут служить сумма чисел, выпавших на двух данных кубиках, или координата Пети после 100 шагов. Важным примером случайной величины является постоянная величина — она во всех мирах равна одному и тому же.

Пусть случайная величина X принимает значение x_i с вероятностью p_i.[1] Тогда *математическим ожиданием* величины X будем называть число $MX = \sum p_i x_i$. На интуитивном уровне математическое ожидание равно попросту среднему значению.

2. Пусть X и Y — случайные величины. Докажите, что $M(X+Y) = MX + MY$.

Этот факт, несмотря на тривиальность доказательства, представляет собой мощнейший инструмент. В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу:

3. Рассмотрим правильный пятиугольник площади 1. Пусть AB — одна из его сторон. Внутрь пятиугольника случайным образом бросается точка S. Найдите математическое ожидание площади[2] треугольника SAB.

Кроме того, типичным является такое рассуждение: чтобы посчитать математическое ожидание очень сложно устроенной величины, давайте разобьем её в сумму большого числа очень просто устроенных, а потом просто сложим их математические ожидания. Например:

4. Рассмотрим множество из n вершин. Между ними независимо проводятся ребра, причем каждое ребро проводится с вероятностью 0.5. Посчитайте математическое ожидание числа циклов в полученном графе.

Надеюсь, теперь вам очевидно, чему равно математическое ожидание координаты Пети после N шагов?

Дисперсия и независимость

Другой важно характеристикой случайной величины является её *дисперсия*. Дисперсия величины X определяется как $DX = M\left((MX - X)^2\right)$.

Дисперсия отвечает за «разброс» случайной величины относительно её среднего значения.

5. Докажите, что $DX = MX^2 - (MX)^2$. *(Подсказка: это очень простая задача)*

Свойство линейности для дисперсии не выполняется (то есть, вообще говоря, $D(X+Y) \neq DX + DY$). Однако, оно будет выполняться, если речь идет о независимых случайных величинах.

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если доля миров, где $Y = y$, одна и та же среди всех миров и среди миров, где $X = x$. Иными словами, величины независимы, если знание значения одной нам ничего не говорит о другой. Формально это записывается как $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$.

6. Пусть величины X и Y независимы. Докажите, что $D(X+Y) = DX + DY$.

[1] Если в этом месте вам неочевидно, что $\sum p_i = 1$, то, возможно, вам стоит перечитать предыдущий текст и его обдумать.

[2] Да, это не вполне честно — для такого рода случайной величины наше определение математического ожидания не работает. Однако, тем лучше — вы будете вынуждены придумать изящное решение.

Собственно, зачем всё это

Теперь мы готовы выяснить, насколько далеко может уйти Петя за N в большинстве случаев. Пусть Y_N — случайная величина, равная его координате после N шагов. Разложив это величину в сумму простых и независимых:

7. Найдите DY_N.

Вся возня с дисперсиями и математическими ожиданиями нам была нужна для того, чтобы воспользоваться следующим фундаментальным фактом:

8. *Неравенство Чебышева.* Дана случайная величина X. Тогда

$$P\big(|X - MX| > \varepsilon\big) \;<\; \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

9. Докажите, что с вероятностью 0.9999 Петя после N шагов будет на расстоянии не больше $100\sqrt{N}$ от нуля.