Принцип крайнего

1. Все стороны треугольника не больше 1. Докажите, что его площадь не больше $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. В стране n аэродромов, попарные расстояния между которыми различны. С каждого взлетает самолет и летит на ближайший аэродром. Докажите, что ни в один аэродром не могло прилететь больше 5 самолетов.

3. На плоскости есть множество точек (их не менее двух). Вместе с любыми двумя точками оно содержит середину отрезка, их соединяющего. Докажите, что это множество бесконечно.

4. Есть нечётное число планет, попарные расстояния между которыми различны. На каждой сидит астрофизик и глядит на ближайшую планету. Докажите, что есть планета, на которую никто не глядит.

5. На плоскости задано множество M. Любая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Докажите, что M бесконечно.

6. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2=2^{2011}$ не имеет решений в натуральных числах.

7. На плоскости дано $n \geqslant 3$ точек так, что не все они лежат на одной прямой. Докажите, что есть окружность, проходящая через три из них, что внутри неё нет других точек из этого множества.

8. На плоскости расположено несколько точек. Площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не более 1. Докажите, что все точки лежат внутри некоторого треугольника площади 4.

9. Докажите, что для любого натурального n число $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}$ не является целым.

10. Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{mn}$, где $1<m<n<2011$, не является целым числом.

11. Имеется квадратная таблица $n\times n$. В клетках стоят нули и единицы. Для каждой клетки с нулем сумма чисел в её строке и столбце не менее n. Докажите, что сумма чисел в таблице не менее $\frac{n^2}{2}$.

12. На плоскости есть конечное множество точек, причем на каждой прямой с двумя точками из этого множества ещё лежит третья. Докажите, что они все на одной прямой.

13. Есть многоугольник. Докажите, что его можно разбить на треугольники с вершинами в вершинах многоугольника.