

Математические игры

1. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы A или B (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). После того, как оба игрока сделают по 1999 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т. е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?
2. На прямоугольном листе бумаги нарисован круг, внутри которого Коля мысленно выбирает n точек, а Миша пытается их разгадать. За одну попытку Миша указывает на листе (внутри или вне круга) одну точку, а Коля сообщает Мише расстояние от нее до ближайшей неразгаданной точки. Если оно оказывается нулевым, то после этого указанная точка считается разгаданной. Миша умеет отмечать на листе точки, откладывать расстояния и производить построения циркулем и линейкой. Может ли Миша наверняка разгадать все выбранные точки менее, чем за $(n + 1)^2$ попыток?
3. На плоскости даны 2005 точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой). Каждые две точки соединены отрезком. Тигр и Осёл играют в следующую игру. Осёл помечает каждый отрезок одной из цифр, а затем Тигр помечает каждую точку одной из цифр. Осёл выигрывает, если найдутся две точки, помеченные той же цифрой, что и соединяющий их отрезок, и проигрывает в противном случае. Доказать, что при правильной игре Осёл выигрывает.
4. Лежит кучка в 10 миллионов спичек. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может взять из кучки спички в количестве p^n , где p — простое число, $n = 0, 1, 2, \dots$. Выигрывает тот, кто берёт последнюю спичку. Кто выигрывает при правильной игре?
5. На столе лежат купюры достоинством $1, 2, \dots, 2n$ тугриков. Двое ходят по очереди. Каждым ходом игрок снимает со стола две купюры, большую отдаёт сопернику, а меньшую забирает себе. Каждый стремится получить как можно больше денег. Сколько тугриков получит начинающий при правильной игре.