

Зацикливание и полуинварианты

1. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в разных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи не смогут собраться на одном дереве.
2. В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Глеб вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Глеб загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Глеб каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.
3. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (k -ой и $(k + 1)$ -ой), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k - 1)$ -ую и $(k + 2)$ -ую комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся (пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают).
4. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырёх идущих подряд чисел a, b, c, d произведение чисел $a - d$ и $b - c$ отрицательно, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такие операции можно проделать лишь конечное число раз.
5. Задан конечный алфавит. Есть конечный набор *запрещенных* слов в этом алфавите. Известно, что существует бесконечное слово, не содержащее ни одно из запрещенных. Докажите, что существует бесконечное циклическое с тем же свойством.