Инварианты

1. Камни лежат в трех кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из четного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

2. На доске выписаны числа 1, 1/2, 1/3, …, $1/n$. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b, стираем их и пишем на доску число $a+b+ab$. Такую операцию проделываем $n-1$ раз, пока не останется одно число. Какое это число? Найдите его и докажите, что оно не зависит от последовательности выбора чисел.

3. **(a)** Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны a и b, то их можно заменить на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $(1-\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$ из тройки $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$?
(b*) …можно заменить на $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$.

4. Можно ли доску размерами $4 \times N$ обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернуться на исходное поле?

5. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x, то можно дописать на нее число $2x+1$ или $\frac{x}{x+2}$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала.