

Геометрия

1. Пусть $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD , O — точка пересечения диагоналей. Окружность с центром в точке O касается стороны BC . Докажите, что касательные к ней, проведенные из точек B и C , пересекаются на AD .
2. Три окружности радиуса R пересекаются в одной точке. Докажите, что окружность, описанная вокруг треугольника, образованного вторыми точками их пересечения, имеет радиус R .
3. На высоте AH треугольника ABC взята точка и через нее проведены чевианы CX и BY . Докажите, что $\angle XHA = \angle YHA$.
4. В треугольнике ABC , $\angle A = 60^\circ$, CC_1 и BB_1 — биссектрисы. Докажите, что точка, симметричная A относительно B_1C_1 , лежит на BC .
5. Пусть точки A_1 , B_1 , C_1 — основания высот остроугольного треугольника ABC , O — центр описанной окружности. Окружность с центром в точке A и радиусом AA_1 пересекает прямую B_1C_1 в точках X и Y , причем X и B лежат по одну сторону относительно BB_1 . Докажите, что прямые XB , YC и AO пересекаются в одной точке.
6. Даны две окружности ω_1 и ω_2 , пересекающиеся в точках A и B . Найти ГМТ середин отрезков XU , где $X \in \omega_1$, $U \in \omega_2$, $A \in XU$.
7. Пусть I — центр вписанной окружности в треугольнике ABC , I_A — центр внеписанной (напротив угла A), A_1 — основание высоты из вершины A . Докажите, что BC — биссектриса угла IA_1I_A .
8. В треугольнике ABC A_1 и B_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AC соответственно, а A_2 и C_2 — середины сторон BC и AB соответственно. Докажите, что A , центр вписанной окружности $\triangle ABC$ и точка пересечения A_1B_1 с A_2C_2 лежат на одной прямой.
9. На сторонах треугольника ABC выбраны точки A_1 , B_1 и C_1 так, что центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают, причем радиус вписанной окружности в $\triangle A_1B_1C_1$ вдвое меньше радиуса вписанной окружности в $\triangle ABC$. Докажите, что треугольник ABC правильный.