# Познай самого себя

*Эти задачи когда-то были задачами под номерами 1 и 2 — а значит, совсем несложные.*

**1.** Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $\big(f(x)\big)^5 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.

**2.** В некоторых клетках таблицы $10 \times 10$ расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако, если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

**3.** Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых $n$ последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

**4.** Вписанная в треугольник $ABC$ окружность $\omega$ касается сторон $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$ соответственно. На продолжении отрезка $AA_1$ за точку $A$ взята точка $D$ такая что $AD = AC_1$. Прямые $DB_1$ и $DC_1$ пересекают второй раз окружность $\omega$ в точках $B_2$ и $C_2$. Докажите, что $B_2C_2$ — диаметр окружности $\omega$.

**5.** Точка $D$ на стороне $BC$ остроугольного треугольника $ABC$ такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника $ABD$, пересекает сторону $AC$ в точках $A$ и $K$. Прямая $DK$ пересекает перпендикуляр, опущенный из $B$ на $AC$, в точке $L$. Докажите, что $CL = BC$.

**6.** Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек — обозначим их $A$, $B$ и $C$, после чего на плоскости отмечалась точка $D$, симметричная $A$ относительно серединного перпендикуляра к $BC$. Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой.

**7.** В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки $O$ внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

**8.** Углы треугольника $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ удовлетворяют неравенствам $\sin\alpha > \cos\beta$, $\sin\beta > \cos\gamma$, $\sin\gamma > \cos\alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный.

**9.** Можно ли при каком-то натуральном $k$ разбить все натуральные числа от 1 до $k$ на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

**10.** Назовем тройку натуральных чисел $(a, b, c)$ *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число $b$ взаимно просто с каждым из чисел $a$ и $c$, а число $abc$ является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число.