

Функциональные уравнения

1. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x) + (x + 1/2) \cdot f(1 - x) = 1$.
2. При каких k существует непостоянная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(k(x + y)) = f(x) + f(y)$?
3. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Докажите, что
 - (a) если f возрастает на $[a, b]$, то она возрастает на \mathbb{R} .
 - (b) если f возрастает на $[a, b]$, то $f(x) = kx$ для какого-то k .
 - (c) если f ограничена на $[a, b]$, то $f(x) = kx$ для какого-то k .
4. Найдите все $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такие, что $f(xy) = f(x) \cdot f(y) - f(x + y) + 1$.
5. Найдите все строго возрастающие функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1$.
6. Найдите все непрерывные $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x + y) = f(x + f(y))$.
7. Найдите все $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x) \cdot \cos(x - y) \leq f(y)$.