

## Целозначные многочлены

Рассмотрим многочлены такого вида

$$\binom{x}{k} = C_x^k = \frac{x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-k+1)}{k!}.$$

1. Докажите, что такие многочлены принимают в целых точках целые значения.
2. Докажите, что любой целозначный (т. е. принимающий в целых точках целые значения) многочлен есть линейная комбинация их с целыми коэффициентами.
3. Пусть многочлен степени  $n - 1$  принимает целые значения в точках  $1, \dots, n$ . Докажите, что он целозначен.
4. Докажите, что значения целозначного многочлена по простому модулю периодичны. Оцените этот период.
5. Глеб хочет написать программу, которая по данному многочлену  $P(x)$  с целыми коэффициентами находит наибольший общий делитель всех его значений. Он не знает, с чего начать, набросайте ему алгоритм.