

Раскраска графов

Раскраска вершин графа называется *правильной*, если соединенные ребром вершины имеют разные цвета.

- (a) В графе вершины всех степеней не больше d . Докажите, что его можно покрасить правильным образом не более, чем в $d + 1$ цвет.

(b) Степень каждой вершины графа не превосходит d . Даны также числа d_1, \dots, d_n такие, что $d_1 + \dots + d_n + n = d + 1$. Докажите, что вершины графа можно разбить на n групп так, чтобы каждая вершина i -ой группы была соединена не более, чем с d_i своих одногруппниц.
- (a) В графе все циклы имеют четную длину. Докажите, что его можно покрасить правильным образом в 2 цвета.

(b) В графе через каждую вершину проходит не более N непересекающихся циклов нечетной длины (имеется в виду, что любые два такие цикла пересекаются только по этой вершине). Докажите, что его можно покрасить в $2N + 2$ цвета.
- (a) В правильном n -угольнике провели несколько непересекающихся диагоналей. Докажите, что полученный граф можно покрасить правильным образом в три цвета.

(b) В графе 1000 вершин, причем степень каждой не больше 9. Докажите, что можно выбрать подграф на 200 вершинах, что в нем не будет нечетных циклов.

Пусть в графе G вершины u и v соединены ребром. Тогда через $G - uv$ будем обозначать граф, в котором это ребро выкинуто, а через G/uv — граф, в котором это ребро «стянуто».

Для графа G через $\chi_G(k)$ будем обозначать количество правильных раскрасок в k цветов.

- (a) Выразите $\chi_G(k)$ через $\chi_{G-uv}(k)$ и $\chi_{G/uv}(k)$.

(b) Докажите, что $\chi_G(k)$ — многочлен от k .
- Граф G нельзя правильным образом покрасить менее, чем в k цветов. Докажите, что в любой его правильной раскраске в k цветов есть путь, в котором есть ровно по одной вершине каждого цвета.
- В графе все вершины имеют степень три. Рассматриваем раскраски его ребер в три цвета так, что в каждой вершине сходятся ребра разных цветов. Известно, что количество таких раскрасок сравнимо с 2 по модулю 4. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.
- В связном графе G 500 вершин, степень каждой вершины не превосходит 3. Назовем раскраску вершин в черный и белый цвета *интересной*, если белым

цветом окрашено более половины вершин, но никакие две белые вершины не соединены ребром. Докажите, что можно выбрать несколько вершин G так, чтобы в любой интересной раскраске больше половины из них были бы окрашены в черный цвет.