

Многочлены

1. Можно ли миллионом парабол покрыть плоскость? (Параболы можно поворачивать и разворачивать.)
2. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ имеет кратный корень тогда и только тогда, когда $P(x)$ и $P'(x)$ имеют общий корень.
3. Докажите, что многочлен

$$P(x) = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

4. Пусть f и g — многочлены степени n . Докажите, что $fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - \dots + (-1)^n f^{(n)}g$ — константа.
5. У многочлена степени n имеется n действительных корней с учётом кратности. Докажите, что среднее арифметическое корней многочлена равно среднему арифметическому корней его производной.
6. Докажите, что при умножении многочлена $(x + 1)^{n-1}$ на любой многочлен, отличный от нуля, получается многочлен, имеющий не менее n ненулевых коэффициентов.
7. У многочлена степени n имеется n различных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?
8. Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и a_0 не равно нулю. Докажите, что последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.