Разнобой

1. Докажите неравенство для положительных значений переменных: $a^3b + b^3c + c^3a \geqslant abc(a + b + c)$.

2. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более 196 перелетов.

3. Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.

4. В ящике лежат два ящика поменьше, в каждом из них ещё по два ящика и т. д. n раз. В каждом из 2^n маленьких ящиков лежит по монете, причём одни вверх гербом, а остальные — вверх решкой. За один ход разрешается переворачивать один любой ящик вместе со всем, что в нём лежит. Доказать, что не больше, чем за n ходов можно расположить ящики так, что число монет, лежащих вверх гербом, будет равно числу монет, лежащих вверх решкой.

5. Если многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1, то он не имеет ни одного целого корня. Докажите это.

6. Квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + ax + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ таковы, что уравнение $P(Q(x)) = Q(P(x))$ не имеет действительных корней. Докажите, что $b \neq d$.

7. Функции $f(x) - x$ и $f(x^2) - x^6$ определены при всех положительных x и возрастают. Докажите, что функция $f(x^3) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^6$ также возрастает при всех положительных x.

8. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.