Вокруг да около теоремы Викто́ра Тебо́

1. *(воспоминания из начальной школы)* Дана окружность. Через точку N внутри этой окружности проведены две прямые. Докажите, что угол между ними равен полусумме дуг, высекаемых прямыми из окружности. А что можно сказать, если точка N вне окружности? А про угол между касательной и хордой?

2. *Лемма Архимеда.* В окружности проведена хорда AB. Другая окружность касается отрезка AB в точке K и окружности в точке L. Докажите, что прямая KL проходит через середину дуги, дополняющей дугу ALB до окружности.

3. *Лемма о трезубце.* Середина дуги BC (не содержащая точки A) описанной окружности треугольника ABC равноудалена от B, C и центра вписанной окружности.

4. Подсказки

(a) Пусть AC — хорда окружности, B_1 — середина дуги AC. Прямая, проходящая через B_1, пересекает AC в точке K и окружность в точке N. Докажите, что $B_1K \cdot B_1N = B_1C^2$.

(b) Пусть I — центр окружности вписанной в треугольник ABC. B_1 — середина дуги AC окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая, проходящая через B_1, пересекает AC в точке K и описанную окружность в точке N. Докажите, что $\angle BIN = \angle IKN$.

(c) Дан треугольник ABC и прямая CD (точки D и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC). Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается прямой CD, если и только если $\angle ABC = \angle ACD$.

5. *Лемма о сегменте.* Пусть D — точка на стороне AC треугольника ABC. Рассмотрим окружность, касающуюся отрезков BD, DC и окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть M и K — точки касания этой окружности с BD и DC соответственно. Докажите, что прямая MK проходит через точку I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

6. *Теорема Виктора Тебо.* Пусть ABC — произвольный треугольник. D — произвольная точка на стороне AC. I_1 — центр окружности, касающейся отрезков AD, BD и описанной около треугольника ABC окружности. I_2 — центр окружности, касающейся отрезков CD, BD и описанной около треугольника ABC окружности. Тогда отрезок I_1I_2 проходит через точку I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, и при этом отношение $I_1I : II_2 = \operatorname{tg}^2 \varphi/2$, где $\varphi = \angle BDA$.

---

7. В окружности проведена хорда. В оба образовавшихся сегмента вписаны окружности. Прямые, проходящие через точки касания этих окружностей с данной и хорду повторно пересекают данную окружность в точках A и B. Докажите, что AB — диаметр данной окружности.

8. В треугольнике ABC $(AB < BC)$ точка I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$. *(IV этап Всероссийской, 9 класс, 2005)*

9. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC. *(V этап Всероссийской, 10 класс, 2006)*

10. Треугольник ABC вписан в окружность S. Пусть A_0 — середина дуги BC окружности S, не содержащей A; C_0 — середина дуги AB, не содержащей C. Окружность S_1 с центром A_0 касается BC, окружность S_2 с центром C_0 касается AB. Докажите, что центр I вписанной в треугольник ABC окружности лежит на одной из общих внешних касательных к окружностям S_1 и S_2. *(V этап Всероссийской, 9 класс, 1999)*

11. Внутри треугольника ABC взята точка X. Прямая AX пересекает описанную окружность в точке A_1. В сегмент, отсекаемые стороной BC, вписана окружность, касающаяся дуги BC в точке A_1, а стороны BC — в точке A_2. Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

12. Пусть треугольник ABC вписан в окружность ω. A_0, B_0 — точки на сторонах BC и CA соответственно такие, что прямая A_0B_0 параллельна AB. В сегменты, стягиваемые хордами BC и CA окружности ω, не содержащие A и B соответственно, вписаны окружности ω_A, ω_B, касающиеся хорд BC и CA в точках A_0, B_0. Докажите, что общая касательная к окружностям ω_A, ω_B, «ближайшая» к AB, параллельна AB. *(Из материалов летней конференции Турнира городов, 1999)*

13. Окружность касается продолжений сторон CA и CB треугольника ABC, а также касается стороны AB этого треугольника в точке P. Докажите, что радиус окружности, касающейся отрезков AP, CP и описанной около этого треугольника окружности равен радиусу вписанной в этот треугольник окружности. *(Соросовская олимпиада, 1998)*

14. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B, K — произвольная точка на меньшей из двух дуг AB этой окружности. На прямой OB взята точка L такая, что прямые OA и KL параллельны. Русть M — точка пересечения окружности ω, описанной около треугольника KLB, с прямой AK, отличная от K. Докажите, что прямая OM касается окружности ω. *(IV этап Всероссийской, 9 класс, 2001)*

15. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC, пересекается с прямой A_0C_0 в точке P. Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC. *(IV этап Всероссийской, 9 класс, 2006)*

16. На диаметре AB окружности S взята точка K и из нее восстановлен перпендикуляр, пересекающий S в точке L. Окружности S_A и S_B касаются окружности S, отрезка LK и диаметра AB, а именно, S_A касается отрезка AK в точке A_1, S_B касается отрезка BK в точке B_1. Докажите, что $\angle A_1LB_1 = 90^\circ$.

17. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Пусть K — середина дуги BC, не содержащей точки A, N — середина отрезка AC, M — точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E. Докажите, что угол EMK — прямой. *(ММО-2003)*9

18. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

Докажите, что $AP \geqslant AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда P совпадает с I. *(IMO-2006)*

19. Пусть треугольник ABC вписан в окружность ω. A_0, B_0 — точки на сторонах BC и CA соответственно, такие что прямая A_0B_0 параллельна AB. В сегменты, стягиваемые хордами BC и CA окружности ω, не содержащие A и B соответственно, вписаны окружности ω_A, ω_B, касающиеся хорд BC и CA в точках A_0, B_0. Докажите, что общая касательная к окружностям ω_A, ω_B, «ближайшая» к AB, параллельна AB. *(Из материалов летней конференции Турнира городов, 1999)*

20. Окружность касается продолжений сторон CA и CB треугольника ABC, а также касается стороны AB этого треугольника в точке P. Докажите, что радиус окружности, касающейся отрезков AP, CP и описанной около этого треугольника окружности равен радиусу вписанной в этот треугольник окружности. *(Соросовская олимпиада, 1998)*