Графы

1. Некоторые пары (из конечного числа) городов соединены (беспосадочными) авиалиниями. Обязательно ли найдутся два города, из которых можно перелететь (за один раз) в одинаковое число городов?

2. Агент иностранной разведки сообщил, что каждая из 15 бывших республик СССР заключила договор ровно с 3 другими. Можно ли ему доверять?

3. В одной стране некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2013 авиалиний, из города Дальнего — одна, а из остальных городов — по 20 авиалиний. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (быть может, с пересадками).

4. Докажите, что в любой компании из 6 человек найдется либо три попарно знакомых, либо три попарно незнакомых.

5. В норке живёт семья из 24 мышей. Каждую ночь ровно четыре из них отправляются на склад за сыром. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу?

6. В классе 20 учеников, причем каждый дружит не менее, чем с 14-ю другими. Можно ли утверждать, что найдутся четыре ученика, которые все дружат между собой?

7. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и два черных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

8. В трех вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается передвигать их по диагонали в любую свободную вершину. Можно ли таким образом добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на свое место, а две другие поменялись местами?

9. В марсианском метро 100 станций. От любой станции до любой другой можно проехать. Забастовочный комитет хочет закрыть проезд через одну из станций так, чтобы проезд между всеми остальными станциями был возможен. Докажите, что такая станция найдется.

10. В тридевятом царстве каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.

11. Докажите, что в дереве есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро (такая вершина называется *висячей*).

12. Докажите,что количество вершин в любом дереве на единицу больше количества ребер.

13. Ребра дерева окрашены в два цвета. Если в какую-то вершину приходят ребра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Можно ли все дерево сделать одноцветным?

14. На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, $\ldots$, 99 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

15. При каком $n > 1$ может случиться так, что в компании из $n + 1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?

16. В компании из $2n+1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

17. Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети? (Укажите все решения.)