Мультипликативность и КТО

Теорема Вильсона. Пусть p простое, тогда выполнено сравнение:

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Определение. *Функция Эйлера* $\varphi(m)$ равна количеству остатков по модулю m, взаимно простых с m. (В частности, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$.)

Теорема Эйлера. Пусть m натуральное, a целое, причем $(a, m) = 1$. Тогда выполнено сравнение:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m},$$

где $\varphi(m)$ — функция Эйлера.

Китайская теорема об остатках (КТО). Пусть дано n попарно взаимно простых натуральных чисел m_1, ..., m_n. Пусть также даны целые числа a_1, ..., a_n. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ \quad \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n}, \end{cases}$$

эквивалентна уравнению вида

$$x \equiv a \pmod{M}$$

для некоторого a, где $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$

1. Дано n натуральных попарно взаимно простых чисел m_1, ..., m_n. Докажите, что для любых целых r_1, ..., r_n существует натуральное a такое, что выполнены условия:

$$a + i - 1 \equiv r_i \pmod{m_i}, \quad i = 1, \ldots n.$$

2. Докажите, что для любых целых a и b и любого натурального m такого, что $(a, m) = 1$, сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$ имеет единственное решение: $x \equiv b \cdot a^{\varphi(m)-1} \pmod{m}$.

3. *Критерий Вильсона.* Докажите, что $p \mid (p-1)! + 1$ при $p > 1$ тогда и только тогда, когда p простое.

4. Пусть n — нечетное число. Докажите, что $2(n+1) \mid n^{n+2} + (n+2)^n$.

5. Найдите все натуральные n такие, что $\varphi(n) = \frac{n}{3}$.

6. Докажите, что $p^2 \mid (2p-1)! - p$ для простого p.

7. Докажите, что одно из чисел $n! - n - 1$, $n! - 2n - 1$ — составное ($n > 3$).

8. Пусть p и q простые, причем $p-1 \mid q-1$. Докажите, что для любого натурального n, взимно простого с p и q, выполнено сравнение

$$n^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

9. Найдите сумму всех правильных несократимых положительных дробей со знаменателем $n > 1$. (Дробь *правильная*, если числитель меньше знаменателя по модулю.)

10. Докажите, что

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n.$$