Остатки и МТФ

1. Докажите, что уравнения не имеют решений в целых числах:
(a) $3x^2 + 2 = y^2$; **(b)** $7x^2 + 2 = y^3$.

9. Решите в целых числах уравнение $15x^2 - 7y^2 = 9$.

2. Решите уравнения в натуральных числах:
(a) $3^y - 2^x = 1$; **(b)** $7^x - 4^y = 1$.

3. Известно, что $21 \mid (a^2 + b^2)$. Докажите, что $441 \mid (a^2 + b^2)$.

4. Известно, что $b \mid a^2$ и $a \mid b^2$. Докажите, что $\text{НОК}(a, b) \leqslant (a, b)^2$.

5. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^m \equiv b^m \pmod{m^2}$.

8. Пусть

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n}\,,$$

где p — нечетное простое, m и n натуральные, причем $(m, n) = 1$. Докажите, что $p \mid m$.

10. Найдите остаток при делении на p числа C_{pk}^{p}, где p — простое.

Малая теорема Ферма. Если p простое, то для любого целого a такого, что $(a, p) = 1$ выполнено сравнение:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

6. Известно, что $p \mid (a^2 + b^2)$, p — простое, $p \equiv 3 \pmod{4}$. Докажите, что $p^2 \mid (a^2 + b^2)$.

7. Пусть m — наименьшее натуральное число такое, что $a^m \equiv 1 \pmod{p}$, где p — простое. Докажите, что $m \mid (p - 1)$.